Двадцатый Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 18 октября 2009 г.

Четвертый тур. Лига тактик

1. Пусть a, b и c — стороны треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{c}{1+a+b^2}+\frac{a}{1+b+c^2}+\frac{b}{1+c+a^2}\leqslant 2.$$

2. Пусть G — полный ориентированный граф без циклов на n^2+1 вершине. Его ребра раскрашены в два цвета. Докажите, что найдется одноцветный путь, проходящий по n ребрам.

3. Натуральные числа $m\geqslant 2$ и n таковы, что $2^{2m+1}\geqslant n^2$. Докажите, что $2^{2m+1}\geqslant n^2+7$.

4. Для множества натуральных чисел $A=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ $(k\geqslant 2)$ обозначим через $A+A$ множество всех чисел вида a_i+a_j, а через $A-A$ — множество всех чисел виду a_i-a_j, где i и j пробегают все возможные значения от 1 до k (в том числе и одинаковые). Например, для $A=\{1,2,3,4\}$ имеем: $A+A=\{2,3,4,5,6,7,8\}$, а $A-A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$. Может число элементов в $A+A$ оказаться больше чем число элементов в $A-A$?

5. Для некоторых натуральных чисел a_1, …, a_n, b_1, …, b_n имеет место соотношение

$$(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2\dots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2=n.$$

Докажите, что $n=3$ или 4.

6. Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных корня p_1 и p_2, а квадратное уравнение $cx^2+bx+a=0$ имеет два различных корня q_1 и q_2. Оказалось, что последовательность p_1, q_1, p_2, q_2 — арифметическая прогрессия. Докажите, что $a+c=0$.

7. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны, а BM — медиана. На отрезке BM таким образом отметили точку N, что $\angle BAN=\angle CBM$. Докажите, что биссектриса угла CNM перпендикулярна прямой AN.

8. На окружности через равные промежутки расположены 360 точек. Двое играют в следующую игру. За один ход можно покрасить одну из непокрашенных ранее точек в красный, синий или зеленый цвет. Первый игрок хочет добиться того, чтобы среди любых семи идущих подряд точек встречались все три цвета. Сможет ли второй игрок ему помешать?

9. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, а точка I_b — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC. Точка D — основание перпендикуляра, опущенного из точки I_b на AB. Докажите, что $\angle OCI_b = \angle CI_bD$.

10. Проведены 2009 хорд данной окружности. Известно, что середина любой хорды принадлежит какой-то другой хорде. Докажите, что одна из хорд совпадает с диаметром.